

Semestre 2 - MATHÉMATIQUES – DEVOIR 2
 durée : 1 heure 30 min – coefficient 1/2

CORRIGE
Exercice 1 : QCM (4 points) - cochez vos réponses ci-dessous

Une seule bonne réponse par question - si réponse fausse, multiple ou manquante : 0 point

1) Le critère de Mayer est :

- $\sum_{i=1}^n e_i$ minimale
 $\sum_{i=1}^n e_i^2$ minimale
 $\sum_{i=1}^n e_i = 0$
 $\sum_{i=1}^n e_i^2 = 0$

2) La méthode de Mayer consiste à séparer le nuage de points en deux par ... :

- valeurs de X
 valeurs de Y
 le point moyen
 hasard

3) Pour saisir sur calculatrice les données d'un tableau de contingence, il faut :

- une liste
 deux listes
 trois listes
 quatre listes

4) Un coefficient de corrélation linéaire compris entre 0 et 0,5 implique que les points du nuage...

- sont distribués presque au hasard
 ne suivent pas une droite
 sont éloignés les uns des autres
 suivent une courbe

5) Pour la liste des 12 chiffres d'affaires mensuels suivants : (26, 37, 48, 29, 36, 50, 23, 38, 47, 25, 34, 49), les moyennes mobiles seraient à calculer sur des groupes de ... valeurs.

- 2
 3
 4
 5

6) Avec la liste (5, 3, 5, 4, 3, 2, 7), l'avant-dernière moyenne mobile des valeurs prises trois par trois est :

- 2
 3
 4
 5

7) Un intervalle à 95% de confiance sous-estime sa prédiction dans :

- 97,5% des cas
 95% des cas
 5% des cas
 2,5% des cas

8) L'amplitude d'un intervalle de confiance augmente lorsque...

- $|r|$ augmente
 le niveau de confiance augmente
 x_0 diminue
 y'_0 diminue

Exercice 2 : (9 points)

 Le tableau ci-dessous indique la teneur de l'atmosphère en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle (année 1850).

Rang de l'année : X	0	50	100	140	150	170
Teneur en CO_2 : Y	275	290	315	350	370	413

 La teneur en CO_2 est exprimée en parties par million (ppm).

 $x = 0$ correspond à l'année 1850, $x = 100$ correspond à l'année 1950, etc.

1) a. Calculer l'équation de la droite de Mayer relative à cette série statistique.

2 pts

Les six valeurs sont partagées en deux fois trois.

$$\begin{aligned}
 x_{G_1} &= \frac{0+50+100}{3} = 50 & x_{G_2} &= \frac{140+150+170}{3} = 153,33 & \text{coef directeur : } a &= \frac{84,33}{103,33} = 0,816129 \\
 y_{G_1} &= \frac{275+290+315}{3} = 293,33 & y_{G_2} &= \frac{350+370+413}{3} = 377,67
 \end{aligned}$$

 $y' = 0,816129x + b$ se traduit avec les coordonnées de G_1 (par exemple) par : $293,33 = 0,816129 \times 50 + b$, ce qui donne $b = 252,53$. Équation de la droite de Mayer : $y' = 0,8161x + 252,5$

 b. Grâce à cette droite, donner une estimation de la teneur en CO_2 en 2040.

1 pt

 $x = 190$ pour l'année 2040. Estimation de la teneur : $y' = 0,8161 \times 190 + 252,5 = 407,6$ ppm.

- c. Calculer la covariance du couple (X, Y) , puis le coefficient de corrélation linéaire de ce même couple. Interpréter. 2 pts

$\bar{x} \approx 101,6667$, $\bar{y} = 335,5$; $\sigma(X) = 59,83774$, $\sigma(Y) = 47,53507$ (mode Stat).

$\text{Cov}(X, Y) \approx \frac{220710}{6} - 101,6667 \times 335,5 \approx 2675,83$, positive, donc si X augmente, Y a tendance à

augmenter : le taux de CO_2 augmente avec le temps. $r \approx \frac{2675,83}{59,83774 \times 47,53507} \approx 0,9407$, pas très proche de 1 : le modèle linéaire n'est peut-être pas le plus adapté.

- 2) Manifestement, le tableau de l'énoncé montre que la teneur en CO_2 n'augmente pas à vitesse constante dans le temps, c'est-à-dire qu'une droite n'est pas adaptée pour modéliser la situation.

- a. On propose le changement de variable $T = \left(\frac{X}{100} + 0,7\right)^4$. Cette fois, le coefficient de corrélation linéaire du couple (T, Y) vaut 0,9969. Interpréter. 0,5 pt

Il est très proche de 1 : la corrélation linéaire entre T et Y est très forte et le modèle linéaire est sans doute assez pertinent.

- b. Donner l'équation de la droite de régression de Y sur T , selon la méthode des moindres carrés. En déduire une équation reliant Y à X . 1,5 pt

Droite : $y = 3,985 t + 277,9$. On en déduit immédiatement : $y = 3,985 \left(\frac{x}{100} + 0,7\right)^4 + 277,9$.

- c. Considérant que l'équation que l'on vient de déterminer modélise correctement l'évolution de la teneur en CO_2 dans l'atmosphère, on demande de faire les prévisions suivantes :

- c1. Quelle sera la teneur en 2040 ? 1 pt

$$y = 3,985 \left(\frac{190}{100} + 0,7\right)^4 + 277,9 \approx 460 \text{ ppm.}$$

- c2. En quelle année le taux dépassera-t-il 500 ppm ? 1 pt

On peut tester quelques valeurs entières de x et constater que :

$$3,985 \left(\frac{203}{100} + 0,7\right)^4 + 277,9 \approx 499,25 \text{ ppm et } y = 3,985 \left(\frac{204}{100} + 0,7\right)^4 + 277,9 \approx 502,51 \text{ ppm.}$$

$1850 + 204 = 2054$: c'est au cours de l'année 2054 que le taux dépassera 500 ppm.

Exercice 3 : (7 points)

Un responsable d'analyses statistiques a souhaité comparer le nombre de véhicules immatriculés dans huit communes et le volume annuel, en euros, d'amendes pour défaut de paiement de stationnement, dans chacune de ces communes. Les observations sont consignées dans le tableau ci-dessous.

véhicules (milliers) : X	3	5	6	10	15	16	19	22
amendes (milliers d'euros) : Y	45	73	89	153	220	245	279	336

- 1) Donner l'équation $y = ax + b$ de la droite des moindres carrés de cette série. 2 pts

$$y = 15,11 x - 1,291$$

- 2) a. En utilisant l'équation de cette droite, déterminer l'intervalle à 99% de confiance du montant total des amendes qu'on peut estimer pour une commune comptant 30 000 véhicules. 4 pts

On calcule les huit valeurs de Y' à partir des valeurs de X du tableau, sur la base de l'équation de la droite, puis les huit valeurs de Z , égales à Y / Y' . La moyenne de Z obtenue est environ 1,00116 et son écart type environ 0,01914.

L'estimation ponctuelle du montant des amendes est $y'_0 = 15,11 x_0 - 1,291 = 451,94$ (k€).

Le coefficient u à appliquer pour un niveau de confiance de 99% est 2,58.

$$I = \left[y'_0 \times (\bar{z} - u \times \sigma_z) ; y'_0 \times (\bar{z} + u \times \sigma_z) \right] = [430,1 ; 474,8]$$

- b. Quelle est la probabilité que, dans une telle commune, le montant des amendes dépasse 430 k€ ? 1 pt
Environ 99,5%, donc.

FIN DU SUJET